



گزینه ۲

۱

$$d_{n+1} = -2d_n + d_{n+2}; d_5 = 4$$

اگر به جای n ، ۵ قرار دهیم به جمله پنجم که معلوم است، می‌رسیم:

$$n = 5 \Rightarrow d_{5+1} = -2d_5 + d_{5+2} \Rightarrow d_6 = -2d_5 + d_7 \Rightarrow d_6 = -2(4) + d_7$$

$$\Rightarrow d_7 - d_6 = 8$$

گزینه ۴

۲

$$\begin{cases} a_{20} = 128 \Rightarrow a_1 r^{19} = 128 \\ a_{15} = 4 \Rightarrow a_1 r^{14} = 4 \end{cases} \Rightarrow \frac{a_1 r^{19}}{a_1 r^{14}} = \frac{128}{4} = 32$$

$$\Rightarrow r^5 = 32 \Rightarrow r = 2$$

$$\frac{a_2}{a_6} = \frac{a_1 r}{a_1 r^5} = \frac{1}{r^4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$$

گزینه ۲

۳

از دنباله نتیجه می‌گیریم که نسبت مشترک برابر ۲ می‌باشد.

$$\frac{1}{2}, 1, 2, 4, \dots, \frac{1}{2} = 2: \text{نسبت مشترک}$$

جمله n ام یک دنباله هندسی به صورت $a_n = a_1 r^{n-1}$ می‌باشد.

$$32 = \frac{1}{2} (2)^{n-1} \Rightarrow (2)^{n-1} = 32 \times 2 \Rightarrow 2^{n-1} = 64 \Rightarrow 2^{n-1} = 2^6$$

$$\Rightarrow n - 1 = 6 \Rightarrow n = 7$$

$$A' = \{۲, ۷, ۹\} , B' = \{۰, ۷\}$$

حال گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

$$\text{گزینه ۱: } A' \cap B = \{۲, ۹\}$$

$$\text{گزینه ۲: } A - B = \{۰\} \Rightarrow (A - B)' = \{۲, ۳, ۶, ۷, ۹\}$$

$$\text{گزینه ۳: } A' \cup B' = \{۰, ۲, ۷, ۹\}$$

$$\text{گزینه ۴: } B' \cup A = \{۰, ۳, ۶, ۷\}$$

$$n(A \cup B) = n(B - A) + n(A) = ۲۵ + ۴۰ = ۶۵$$

$$n((A \cup B)') = n(U) - n(A \cup B) = ۸۰ - ۶۵ = ۱۵$$

ابتدا مجموعه $A - \{B\}$ را تشکیل می‌دهیم:

$$A - \{B\} = \{a, b, \{a\}, \{a, b\}\} - \{\{\{a, b\}\}\} = \{a, b, \{a\}, \{a, b\}\}$$

که چهار عضو، $۲^۴ = ۱۶$ زیرمجموعه و $۱۶ - ۱ = ۱۵$ زیرمجموعه ناتهی دارد.

$$\left. \begin{aligned} a_{\lambda} &= -۲۷ \\ a_{\omega} &= ۱ \end{aligned} \right\} \Rightarrow a_n = a_1 r^{n-1}$$

جمله عمومی دنباله هندسی:

$$\left. \begin{aligned} a_{\lambda} &= a_1 r^{\lambda} \\ a_{\omega} &= a_1 r^{\omega} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} -۲۷ &= a_1 r^{\lambda} \\ ۱ &= a_1 r^{\omega} \end{aligned} \right\}$$

طرفین را بر هم تقسیم می‌کنیم:

$$-\frac{۲۷}{۱} = \frac{a_1 r^{\lambda}}{a_1 r^{\omega}}$$

$$-۲۷ = r^{\omega} \Rightarrow (-۳)^{\omega} = r^{\omega} \Rightarrow r = -۳$$

r را در یکی از معادلات بالا قرار می‌دهیم تا a_1 را به دست آوریم:

$$۱ = a_1 (-۳)^{\omega} \Rightarrow a_1 = (-۳)^{-\omega}$$

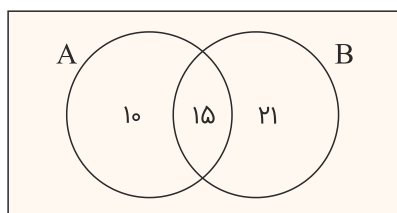
$$a_n = a_1 r^{n-1} \Rightarrow a_n = (-۳)^{-\omega} (-۳)^{n-1} = (-۳)^{n-\omega} \Rightarrow a_n = (-۳)^{n-\omega}$$

تعداد کل دایره‌ها در هر شکل، برابر با $n^2 + ۴$ است.

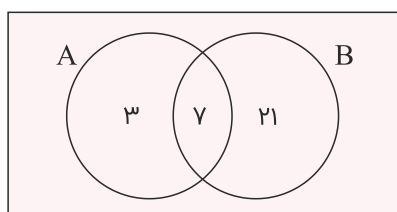
در مراحل فرد، دایره‌های کناری آبی و در مراحل زوج، دایره‌های کناری سفید هستند. دایره‌های کناری در همه شکل‌ها ۴ تا است. مرحله یازدهم چون فرد می‌باشد، پس n^2 دایره سفید دارد.

$$n = ۱۱ \Rightarrow n^2 = ۱۲۱$$

طبق فرض، پیش از تغییر، اعضاء به صورت زیر توزیع شده بودند:



۱۵ عضو از A برداشته‌ایم که ۸ عضو آن در اشتراک دو مجموعه حضور داشته‌اند، پس ۸ عضو از اشتراک کم می‌شود و ۷ عضو هم از باقی‌مانده A:



$$n(A \cup B) = 3 + 7 + 21 = 31$$

$$A = \{0, 4, 8, 12, 16, \dots\} \Rightarrow A' = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13, \dots\}$$

$$B = \{0, 1, 2, \dots, 12\} \Rightarrow B' = \{13, 14, 15, 16, \dots\}$$

ازطرفی:

$$(A' \cup B)' = A \cap B' = \{16, 20, 24, \dots\} \Rightarrow \text{بی‌شمار عضو دارد}$$

جمله n ام یک دنباله حسابی با اختلاف مشترک d و جمله اول a_1 به صورت زیر معرفی می‌شود:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$a_1 = -5, d = 2 \Rightarrow a_9 = a_1 + (9 - 1)d \Rightarrow a_9 = -5 + 8(2) = -5 + 16 = 11$$

جمله n ام یک دنباله حسابی برابر است با:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$\begin{cases} a_5 = -1 \\ a_8 = 5 \end{cases} \Rightarrow \times(-) \begin{cases} -1 = a_1 + 4d \\ 5 = a_1 + 7d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} +1 = -a_1 - 4d \\ 5 = a_1 + 7d \end{cases} \Rightarrow 6 = 3d \Rightarrow d = 2$$

$$\Rightarrow 1 = -a_1 - 4(2) \Rightarrow 1 = -a_1 - 8 \Rightarrow a_1 = -9$$

$$a_{17} = a_1 + (17 - 1)d \Rightarrow a_{17} = -9 + 16(2) = 23$$

$$A \subseteq B \Rightarrow \begin{cases} A \cap B = A \\ A \cup B = B \end{cases}$$

$$\begin{cases} A \subseteq B \\ A \text{ نامتناهی} \end{cases} \Rightarrow B \text{ نامتناهی}$$

حال داریم:

الف) $B - A$: متناهی یا نامتناهی

ب) $A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A$: نامتناهی

پ) $B' - A' = A - B = \emptyset$: متناهی

ت) $(A \cup B)' = (B)' = B'$: متناهی یا نامتناهی

پس فقط یکی از مجموعه‌های داده‌شده قطعاً متناهی است.

شکل اول یک مثلث است.

شکل دوم یک چهار ضلعی و قطرهای آن است.

شکل سوم یک پنج ضلعی و قطرهای آن است.

پس شکل n ام یک $n + 2$ ضلعی و قطرهایش را مشخص می‌کند.

نکته: تعداد قطرهای n ضلعی برابر $\frac{(n-3) \times n}{2}$ است.

$$\text{تعداد خطوط در شکل } n \text{ ام} : \underbrace{n+2}_{\text{تعداد ضلع‌ها}} + \underbrace{\frac{((n+2)-3) \times (n+2)}{2}}_{\text{تعداد قطرها}}$$

تعداد خطوط در شکل دهم که یک دوازده ضلعی است به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$a_{10} = 12 + \frac{9 \times 12}{2} = 12 + 54 = 66$$

$$a_n = \left[\frac{2n+1}{n} \right] = \left[2 + \frac{1}{n} \right] = 2 + \left[\frac{1}{n} \right]$$

جمله اول برابر ۳ و بقیه جملات ۲ هستند.

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{50} = 3 + 2 + 2 + \dots + 2 = 3 + 49 \times 2 = 3 + 98 = 101$$

اشتراک دو بازه باز تنها زمانی متناهی است که شامل هیچ عضوی نباشد یا به عبارتی تهی باشد. بنابراین اشتراک دو بازه تهی است.

$$\frac{3k-1}{2} \geq \frac{5k-13}{3} \xrightarrow{\times 6} 9k-24 \geq 10k-26 \Rightarrow k \leq 2$$

پس به ازای مقادیر حسابی ۱، ۲، ۰ از k ، اشتراک A و B متناهی است.

$$t_r + t_f = 4t_w \Rightarrow t_1 r + t_1 r^3 = 4t_1 r^2 \xrightarrow{\div t_1 r} 1 + r^2 = 4r \Rightarrow r^2 - 4r + 1 = 0$$

$$\Rightarrow r = 2 \pm \sqrt{3} \xrightarrow{r < 1} r = 2 - \sqrt{3}$$

$$\frac{t_5}{t_3} = r^2 = (2 - \sqrt{3})^2 = 7 - 4\sqrt{3}$$

جمله n ام یک دنباله هندسی از رابطه $a_n = a_1 r^{n-1}$ به دست می‌آید و r نسبت مشترک و a_1 جمله اول است.

$$a_7 = 64, \quad a_5 = 16, \quad a_3 = ?$$

$$\left. \begin{array}{l} a_7 = a_1 r^6 \\ a_5 = a_1 r^4 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 64 = a_1 r^6 \\ 16 = a_1 r^4 \end{array} \right\} \xrightarrow{(\div)} \frac{64}{16} = \frac{a_1 r^6}{a_1 r^4} \Rightarrow 4 = r^2 \Rightarrow r = \pm 2$$

چون دنباله افزایشی است بنابراین $r > 1$ می‌باشد، پس $r = 2$ قابل قبول است. r را در یکی از معادلات بالا قرار می‌دهیم تا a_1 به دست آید:

$$16 = a_1 (2)^4 \Rightarrow a_1 = 1$$

$$a_3 = a_1 r^2 = 1(2)^2 = 4$$

گزینه "۱": اجتماع دو مجموعه نامتناهی، قطعاً نامتناهی است.

گزینه "۲": مجموعه مضرب‌های طبیعی عدد ۱۳ برابر است با $\{13, 26, 39, \dots\}$ ، بنابراین نامتناهی می‌باشد.

گزینه "۳": متناهی است.

گزینه "۴": مجموعه اعداد غیر اول زوج، نامتناهی است.

واضح است که اعداد موجود در دسته n ام از $1 + (n-1)^3$ شروع شده و به n^3 ختم می‌شوند؛ بنابراین دسته دهم این اعداد عبارت است از:

$$10^3, \dots, (10-1)^3 + 3, (10-1)^3 + 2, (10-1)^3 + 1$$

پس اختلاف کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عضو دسته دهم برابر است با:

$$10^3 - (9^3 + 1) = 1000 - (729 + 1) = 270$$